EXAMEN: Formule Note = 1 + 5 * NbPts / 35

Cours du 16.11.2020

lundi, 16 novembre 2020 18:39

Définition: On appelle le "Plus Grand Diviseur Commun" (PGCD)
De deux nombres *a* et *b* par
PGCD(a,b)

QUESTION: Comment calculer le PGCD ???

Réponse : passer par la factorisation en nombres premiers

NOTE : on va supposer $a \geq b$

EXEMPLE: calculez le PGCD (168, 32)

Méthode 1 : FACTORISATION

$$32 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$$

$$168 = 2 \cdot 84 = 2 \cdot 2 \cdot 42 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 21 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 3 \cdot 7$$

$$PGCD = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

32 est divisible par 8

168 est divisible par 8

IMPORTANT: "a divisible par b" signifie que le RESTE de a / b = 0

↳ EN NOMBRES ENTIERS !

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline \boxed{r=0} & q \end{array} \qquad \frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$$

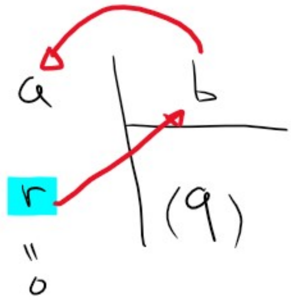
$\boxed{r=0}$ | q $\qquad\qquad$ $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$

Algorithme d'Euclide:

Entrée : $a, b \in \mathbb{Z}$ $(a \geq b)$

Sortie : PGCD*(a,b)*

Poser , $\boxed{r = a \bmod b}$



TANT QUE r != 0 faire

a ← b

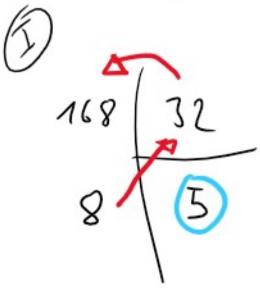
b ← r

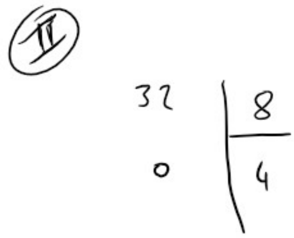
r = a mod b

FIN

PGCD(a,b) = b

Exemple : PGCD(168, 32)





$168 : 32 = 5{,}25 \Rightarrow 168 = 5{,}25 \cdot 32 \quad \in [0,1[$

$= 5 \cdot 32 + \underbrace{0{,}25 \cdot 32}_{\in [0,31]}$

Exercice : Calculez PGCD(770,168)

$770 = 168 \cdot 4 + 98$

$168 = 98 \cdot 1 + 70$

$98 = 70 \cdot 1 + 28$

$70 = 28 \cdot 2 + 14$

$28 = 14 \cdot 2 + 0$

STOP

$PGCD(770, 168) = 14$

Le calcul de la factorisation en nombres premiers est "fastidieux".
L'algorithme d'Euclide est dans la classe d'algorithmes la plus performante.

Lien entre le PGCD et le PPCM (Plus Petit Commun Multiple)

$32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$

$168 = 2 \cdot 84 = 2 \cdot 2 \cdot 42 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 21 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$

PGCD(a,b) = Produit des facteurs "Communs" $= 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

PPCM(a,b) = Produit des facteurs "restants" $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 672$

PROPRIETE REMARQUABLE :

PGCD(a,b) · PPCM(a,b) = a · b

$8 \cdot 672 = 32 \cdot 168 = 5376$

Donc, pour le calculer le PPCM on dispose d'un algo.
Efficace : on calcule a*b, puis PGCD(a,b) avec Euclide, et

finalement

$$PPCM(a,b) = \frac{a \times b}{PGCD(a,b)}$$

PAS BESOIN de passer par la factorisation !!!!

Exercice : (série 5 sur le site du cours)

Prouvez que si PGCD(a,b) = 1, alors
PGCD(a*b, c) = PGCD(a,c) * PGCD(b,c)

$\circledast$ $a = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = \prod_{i=1}^{N} a_i$

PREUVE:

$a = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_N$ $\circledast$ (facteurs premiers) $\nearrow \geq 2$

$b = b_1 \cdot b_2 \ldots b_M$ } il n'y jamais le même entre a_i et b_j $i=1,\ldots,N$ $j=1,\ldots,M$

Par le théorème fond. de l'Arithmétique.

① Comme PGCD(a,b)=1, alors AUCUN des a_i = b_j (sinon PGCD(a,b) >= 2 !!!)

② PGCD(a*b,c) = Facteurs communs de a*b et c

$c = c_1 \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot c_{M'}$

Sont à la fois dans $c_1, \ldots, c_{M'}$ et $a_1, \ldots, a_N$ et $b_1, \ldots, b_M$

③ Comme aucun des a_i et b_j ne sont les mêmes, alors SOIT le facteur du PGCD est un facteur commun de a et c, soit un facteur commun de b et c (de manière exclusive)

④ Il suffit alors de regrouper les facteurs communs de a et c => PGCD(a,c), et de même pour les fact. communs de b et c => PGCD(b,c)

$$PGCD(a \cdot b, c) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots = PGCD(a,c) \cdot PGCD(b,c)$$

3) Je devrais encore prouver que TOUS les facteurs du PGCD(a,c) et PGCD(b,c) sont dans le PGCD(a*b, c).... TRIVIAL car s'il y a un facteur commun entre a et c (ou a et b), ce sera forcément aussi un facteur commun de a*b et c !

CQFD.

Théorème de Bachet-Bézout: (XVIIe s.)

Soient a,b deux entiers relatifs $(a, b \in \mathbb{Z}^*)$ alors il existe deux entiers relatifs x et y $\in \mathbb{Z}$ tels que

$$a \cdot x + b \cdot y = PGCD(a, b)$$

x et y sont appelés les "***coefficients de Bézout***".

EXEMPLE:

PGCD(168, 32) = 8. Trouvez les coefficients de Bézout !

Trouvez x et y (DANS $\mathbb{Z}$) tels que

168 * x + 32 * y = 8.

$$168 \cdot 1 - 32 \cdot 5 = 168 - 160 = 8 \quad PGCD(168, 32)$$

Y en a-t-il d'autres ? OUI, il y en a une INFINITE !!!!